Ορισμός: Έστω $f:([a,\beta])\to\mathbb{R}^n$ συνεχής τότε
$\int_\gamma f\cdot dx=\int_a^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$ ονομάζεται
επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη γ.
όπου $\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη

Συμβολισμός: Συχνά ο παραπάνω ορισμός ($2^{ος}$ ορισμός επικαμπυλίου) γράφεται και στη μορφή (αν $f=(f_1,\dots,f_n)^T$)

$$\int_\gamma f_1\,dx_1+\dots+f_n\,dx_n \quad \text{όπου} \quad x=(x_1,\dots,x_n)$$
$$\|$$
$$\int_\gamma f\cdot(dx_1,\dots,dx_n)=\int_\gamma f\cdot dx$$

Πρόταση (Άλγεβρα επικαμπυλίων)

Αν $\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{R}^n$ C^1 καμπύλη και $f,g:\gamma([a,\beta])\to\mathbb{R}^n$ συνεχείς. Τότε:

α. $\int_\gamma(f+g)\cdot dx=\int_\gamma f\cdot dx+\int_\gamma g\cdot dx$

β. $\int_\gamma(c\cdot f)\,dx=c\cdot\int_\gamma f\cdot dx$, $c\in\mathbb{R}$

γ. $\left|\int_\gamma f\cdot dx\right|\le(\max\|f\|)\,L(\gamma)=(\max\|f\|)\cdot\int_a^\beta\|\gamma'(t)\|\,dt=$
$=\max\{\|f(t)\|: t\in[a,\beta]\}\cdot\int_a^\beta\|\gamma'(t)\|\,dt$.

αφού
$$\int_a^\beta|f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)|\,dt\le\|f(\gamma(t))\|\cdot\|\gamma'(t)\|$$

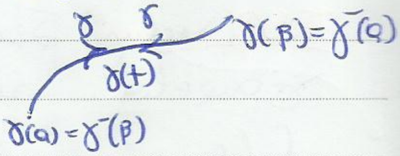
Ορισμός:

Μια παραμετρική καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη, εάν υπάρχουν $a=t_0<t_1<\dots<t_k=\beta$, έτσι ώστε οι καμπύλες $\gamma_i=\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$, $i=1,\dots,k$ να είναι συνεχώς διαφορίσιμες. Τότε γράφουμε $\gamma=\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\dots\oplus\gamma_k$ και ορίζουμε

$$\int_\gamma f\cdot dx := \int_{\gamma_1} f\cdot dx+\dots+\int_{\gamma_k} f\cdot dx \quad \text{(αν τα ολοκλ. } \exists \text{ δεξιά)}$$

Πρόταση / Ορισμός:

Έστω $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη, $\gamma^-:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$, $\gamma^-(t)=\gamma(\alpha+\beta-t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ η αντίστροφη καμπύλη της γ και $f:\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{R}^n$ συνεχής. Τότε $\int_{\gamma^-} f\cdot dx=-\int_\gamma f\cdot dx$



($\Rightarrow$ Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας διανυσματικής συνάρτησης εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης, δηλ από την κατεύθυνση κατά την οποία διατρέχουμε την καμπύλη)

Απόδειξη

$$\int_{\gamma^-} f\cdot dx=\int_\alpha^\beta f(\gamma^-(t))\cdot(\gamma^-)'(t)\,dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta f(\gamma(\alpha+\beta-t))\cdot\gamma'(\alpha+\beta-t)\cdot(-1)\,dt=$$

$$=\int_\beta^\alpha f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,d\tau$$

$$=-\int_\alpha^\beta f(\gamma(\tau))\cdot\gamma'(\tau)\,d\tau \overset{\text{ορ}}{=} -\int_\gamma f\cdot dx$$

Πρόταση

Έστω $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ με C^1 καμπύλη και $\phi:[A,B]\to[\alpha,\beta]$ ένας C^1 παραμετρικός μετασχηματισμός που διατηρεί προσανατολισμό (δηλ. η ϕ είναι 1-1 και επί συνεχώς διαφορίσιμη και γν. αύξουσα) Τότε η $\gamma\circ\phi:[A,B]\to\mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη με $(\gamma\circ\phi)[A,B]=\gamma([\alpha,\beta])$ και

$$\int_{\gamma\circ\phi} f\cdot dx=\int_\gamma f\cdot dx \quad \forall\, f:\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{R}^n \text{ συνεχής}$$

Απόδειξη

$$\int_{\gamma\circ\phi} f\cdot dx = \int_A^B f(\gamma(\varphi(\tau)))\cdot(\gamma\circ\phi)'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\beta)} (f\circ\gamma)(\varphi(\tau))\cdot\gamma'(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_a^\beta (f\circ\gamma)(t)\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_\gamma f\cdot dx$$

Παραδείγματα:

α) $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, $f(x,y) = \binom{-y}{x}$
και $g(x,y) = \binom{x}{y}$. Τότε:

$$\int_\gamma f\cdot d(x,y) \overset{\text{op}}{=} \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\cdot(-r\sin t, r\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-r\sin t, r\cos t)\cdot(-r\sin t, r\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = r^2\cdot 2\pi$$

$$\int_{\gamma^-} f\cdot d(x,y) \overset{\text{op}}{=} \int_0^{2\pi} f(\gamma^-(t))\cdot\gamma^{-\prime}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (r\cdot\cos(2\pi-t), r\sin(2\pi-t))\,\gamma^{-\prime}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \gamma(2\pi-t)\cdot\gamma^{-\prime}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (r\cos t, -r\sin t)\,\gamma^{-\prime}(t)\,dt \quad (1)$$

Αλλά, $\sin(a+\beta) = \sin a\cdot\cos\beta + \cos a\cdot\sin\beta$
$\cos(a+\beta) = \cos a\cdot\cos\beta - \sin a\sin\beta$

Άρα, η (1) είναι:

$$\int_{\gamma^-} f\cdot d(x,y) = \int_0^{2\pi} f(r\cos t, -r\sin t)\cdot(-r\sin t, -r\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (r\sin t, r\cos t)(-r\sin t, -r\cos t)\,dt = -2\pi r^2$$